

# EL PÈNDOL AMB SUSPENSIO VIBRANT o com aguantar-se dret

per Miquel Noguera

*La màquina construïda en Meccano© és una donació a la FME de la vídua d'en Josep M. Peris Llagostera, professor de l'assignatura Mètodes Numèrics 3 de la Llicenciatura de Matemàtiques des dels seu inici fins que el càncer el va apartar de les classes. Aquest escrit és un petit homenatge a un company i amic per a la seva dedicació a la docència i per com entenia aquesta docència. El text que teniu a continuació és el que s'entregava als estudiants de l'assignatura per a la realització de la pràctica corresponent. També en record d'ell he mantingut escanejat el seu dibuix original.*

*En Josep M. Peris va decidir construir la màquina a causa de la incredulitat dels estudiants: – Una cosa és la teoria i l'altra la realitat, això no deu passar pas – deien. La segona màquina, feta amb Lego©, és una versió reduïda, amb motor i amb possibilitat de variar la freqüència i de prendre mesures, gràcies als sensors i al microprocessador que incorpora. A títol anecdòtic, aquest muntatge metàl·lic té la distinció d'haver estat funcionant sobre la taula del despatx del rector de la UPC.*

## 1. INTRODUCCIÓ

Tothom sap que un pèndol que pugui donar la volta completa en el pla vertical té dues posicions d'equilibri: la inferior, estable i la superior, inestable. Però què passa si el punt de suspensió es fa vibrar verticalment? Doncs que, si la freqüència de vibració és prou alta, la posició superior esdevé estable. Un pèndol que oscil·la... invertit!

Aquest sistema té la particularitat de que es pot realitzar físicament sense complicacions. El fregadís, les oscil·lacions paràsites i altres "follets" de la mecànica que normalment fan fracassar els benintencionats muntatges demostratius, aquí tenen poc efecte. És possible utilitzar el model simplificat, sense fregadís, i obtenir resultats que s'ajusten al que s'observa a la realitat. És més: aquest pèndol presenta comportaments que serien molt difícils d'obtenir a la pràctica sense saber prèviament que *existeixen*, com el que s'anomena "ressonància paramètrica".

En general, la posició inferior del pèndol vibrant és un equilibri estable. Però quan els paràmetres del sistema —la amplitud i la freqüència de vibració— prenen certs valors, l'equilibri perd l'estabilitat i el pèndol comença a oscil·lar violentament. D'aquí el nom de ressonància *paramètrica*. Com aquest és un fenomen local, per al seu estudi és suficient l'aproximació lineal a prop dels punts d'equilibri, és a dir, les solucions de l'equació variacional. En el sistema que estudiem, i tant a la posició inferior com a la superior, aquesta equació és un tipus particular d'equació lineal amb coeficients periòdics, anomenada de Mathieu, de gran importància en diferents branques de les matemàtiques, la física i l'astronomia.

## 2. EQUACIONS DEL MOVIMENT.

El pèndol és una barra sense massa, de llargada  $l$  amb una massa  $m$  concentrada al extrem (si es tracta d'una barra rígida de massa  $M$  i llargada  $L$ , és suficient substituir  $l = 2/3L$ ). La barra pot girar sobre un pivot que oscil·la verticalment amb el·longació  $b \sin \omega t$  (veure la figura).

Prendrem com a origen la posició vertical. La posició, en funció de l'angle  $\theta$  és:

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = l \cos \theta + b \sin \omega t \end{cases}$$

Ara podem calcular les energies cinètica ( $T$ ) i potencial ( $V$ ):

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left( l^2 \dot{\theta}^2 - 2lb\omega\dot{\theta} \sin \theta \cos \omega t + b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \right) \\ V &= mg (l \cos \theta + b \sin \omega t) \end{aligned}$$

Escriguem l'equació del moviment en la forma de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \text{on} \quad L = T - V.$$

Un càlcul directe dona:

$$(1) \quad \ddot{\theta} - \left( \frac{g}{l} - \frac{b}{l} \omega^2 \sin \omega t \right) \sin \theta = 0.$$

Aquesta és l'equació que utilitzarem per a l'estudi del moviment global i també per a l'anàlisi local entorn de la posició superior.

Per a l'anàlisi local entorn de la posició inferior, és millor prendre com a origen  $\theta = \pi$ , és a dir, fer el canvi de variable  $\theta = \pi - \varphi$ . L'equació es transforma en la següent:

$$(2) \quad \ddot{\varphi} + \left( \frac{g}{l} - \frac{b}{l} \omega^2 \sin \omega t \right) \sin \varphi = 0.$$

## 3. DIFERENTS FORMES DE L'EQUACIÓ.

Quan  $b = 0$ , recuperem l'equació del pèndol simple que, linealitzada a l'entorn de  $\varphi = 0$  és

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

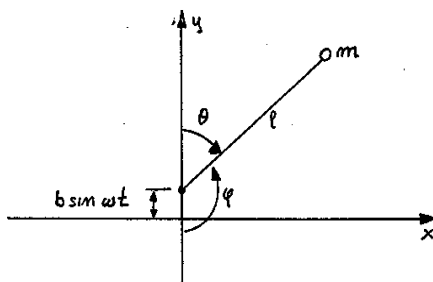


Figura 1. El pèndol amb suspensió vibrant.

anomenarem  $w_0$ ,  $f_0$  i  $T_0$ , respectivament, a la pulsació, freqüència i període propis del pèndol no pertorbat:

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad f_0 = \frac{w_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Una quantitat significativa és la relació entre la pulsació del moviment vibratori vertical i la pulsació pròpia del pèndol:

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0}.$$

Una manera d'adimensionalitzar les equacions és posar, a l'equació (1),  $\tau = w_0 t$ ,  $\mu = b/l$ , i representar les derivades respecte a  $\tau$  per primes:

$$(3) \quad \theta'' - (1 - \mu \bar{w}^2 \sin \bar{w} \tau) \sin \theta$$

Aquesta és la forma que dona Landau ([5], pàg 13 i 144), i també és convenient pels càlculs numèrics. Escrita en forma de sistema:

$$(4) \quad \boxed{\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = (1 - \mu \bar{w}^2 \sin \bar{w} \tau) \sin x \end{array} \right. \quad \text{on} \\ x = \theta, \quad y = \theta' = w_0 \dot{\theta}, \quad \tau = w_0 t, \quad \mu = \frac{b}{l}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_0} \end{array}}$$

Hem dit abans que quan es linealitzava (aproximar  $\sin \theta$  per  $\theta$ ) queda l'equació de Mathieu. La forma usual d'aquesta equació és:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + (\lambda - 2q \cos 2z) y = 0$$

i així es pot trobar, amb una llista de les seves solucions i propietats, a la pàg. 721 de [1], 310 de [3], 283 de [4] i 610 de [9]. Donarem els canvis de variable necessaris:

A l'entorn de la posició superior (a partir de (1)):

$$wt = 2z - \pi/2, \quad \text{i així} \quad \sin wt = -\cos 2z$$

Resulta

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \left( -\left( \frac{2}{\bar{w}} \right)^2 - 2 \left( 2 \frac{b}{l} \right) \cos 2z \right) \sin \theta = 0$$

Els paràmetres corresponen, en aquest cas a

$$\lambda = -(2/\bar{w})^2 < 0 \quad q = 2\mu = 2b/l$$

A l'entorn de la posició inferior (a partir de (2)), el mateix canvi dona:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \left( \left( \frac{2}{\bar{w}} \right)^2 - 2 \left( 2 \frac{b}{l} \right) \cos 2z \right) \sin \varphi = 0$$

i ara els paràmetres són:

$$\lambda = (2/\bar{w})^2 > 0 \quad q = 2\mu = 2b/l$$

En el llibre de Arnold [2] hi ha una descripció de la ressonància paramètrica, i de la teoria de Floquet (equacions lineals amb coeficients periòdics). També es pot trobar a [8], i a molts altres llibres sobre equacions diferencials.

## 4. TREBALLS PROPOSATS.

1. Amb el sistema d'equacions (4) i els valors  $g = 980 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $l = 20 \text{ cm}$  i  $b = 1 \text{ cm}$ , resulta  $w_0 = 7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $f_0 = 1.11 \text{ Hz}$ ,  $T_0 = 0.9 \text{ s}$ ,  $\tau = 7 \cdot t$ ,  $y = 7 \cdot \theta$ ,  $\mu = 0.05$  i  $\bar{w} = w/7$ . Per  $\bar{w} = 30$  i valors més grans, la posició d'equil·libri superior és estable. Prenent valors inicials  $\theta_0 = 0$  i  $\dot{\theta}_0 = 1.43 \cdot 10^{-4}$  ( $y_0 = 10^{-3}$ ), s'obté una òrbita continguda en el rectangle  $|x| < 0.0035$ ,  $|y| < 0.005$ . Contràriament, quan  $\bar{w} = 28$  i valors inferiors, l'equil·libri superior és inestable, i les òrbites arriben fins a  $2\pi$ . Es tracta de dibuixar unes quantes òrbites per diferents valors de  $\bar{w}$  i trobar, d'aquesta manera, aproximadament, el valor de  $\bar{w}_c$  que separa la estabilitat de la inestabilitat.
2. Estudiar l'aplicació de Poincaré  $P$ , a temps  $\tau = 2\pi/\bar{w}$ , per esbrinar l'estabilitat del punt d'equil·libri  $(0,0)$ . Per això, calcular  $DP(0,0)$  usant:
  - (a) Derivació numèrica i extrapolació de Richardsón.
  - (b) Les primeres equacions variacionals.
 Amb els mateixos valors del primer apartat, trobar amb tota l'exactitud possible el valor de  $w_c$ .
3. Al pla  $\mu - \bar{w}$ , s'anomenen corbes separatrius les que separen les regions d'estabilitat de les d'inestabilitat, i compleixen  $|Tr(DP(0,0))| = 2$ . Trobar-les mitjançant algun mètode de continuació. Aquest estudi és local: es refereix a l'estabilitat lineal del punt d'equil·libri. Es poden calcular aproximacions analítiques de les separatrius a partir de les equacions variacionals. Hi han gràfiques i desenvolupaments en sèrie per valors petits de  $\mu$  a la bibliografia sobre l'equació de Mathieu. Comparar-les amb els resultats numèrics. Quan  $\mu \rightarrow \infty$  es fan aproximacions asimptòtiques, però per valors de  $\mu$  grans però finits, l'únic camí és el numèric.
4. Repetir l'apartat 3 amb el punt d'equil·libri inferior. (Utilitzar el sistema (4) amb el canvi  $\theta = \pi - \varphi$ ). En aquest cas, les regions d'inestabilitat s'anomenen regions de ressonància paramètrica.
5. Wiggins demostra, analíticament (emprant la integral de Melnikov) que, per al pèndol vibrant i amb fregadís, i per a certs valors dels paràmetres, hi ha intersecció transversal de varietats invariants i, per tant, caos. ([10], pàg 419). Estudiar numèricament les varietats invariants dels punts fixos de l'aplicació de Poincaré  $P$ , identificant l'hiperplà  $\tau = 0$  amb l'hiperplà  $\tau = 2\pi/\bar{w}$ , i esbrinar quan es tallen. Quan ho fan amb un angle molt petit, és un problema numèric molt difícil, ja que la precisió del càlcul està limitada pel nombre de xifres de la màquina. Treballant amb precisió doble no és prudent intentar detectar angles inferiors als  $10^{-8}$  radians.
6. Els punts sobre les corbes separatrius en el pla  $\mu - \bar{w}$  són possibles punts de naixement de famílies d'òrbites periòdiques. Seguint-les, es troba una cascada de bifurcacions de doblament de període, que desemboca en caos. ([6], pàg 11).
7. Construir un pèndol amb suspensió vibrant amb possibilitat de controlar i mesurar la freqüència de vibració (es pot fer amb LEGO MINDS-TORMS). Comparar els valors obtinguts experimentalment amb el

resultats teòrics de les equacions diferencials. Es pot estudiar, per exemple, la frontera d'estabilitat i d'inestabilitat del punt d'equilibri superior. Podeu veure dues construccions d'un pèndol amb suspensió vibrant a les figures 2 i 3.

## REFERÈNCIES

- [1] M.Abramowitz, I.Stegun. *Handbook of Mathematical Functions* Dover, New York, 1972.
- [2] V.I.Arnold. *Mecánica Clásica, métodos matemáticos*. Paraninfo, Madrid, 1983.
- [3] H.Hochstadt *The Functions of Mathematical Physics*. Dover, New York, 1986.
- [4] E.Jahnke, F.Emde. *Tables of Functions*. Dover, New York, 1945.
- [5] L.D.Landau, E.M.Lifshitz. *Mecánica* (volum 1 del *Curso de Física Teórica*). Segona edició, Reverté, Barcelona, 1985.
- [6] T.Mullin (editor). *The Nature of Chaos*. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [7] A.H.Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [8] F.Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [9] Z.X.Wang, D.R.Guo. *Special Functions*. World Scientific Publishing, Singapore, 1989.
- [10] S.Wiggins. *Global Bifurcations and Chaos, analytical methods*. Appl. Math. Sci. 73, Springer-Verlag, New York, 1988.

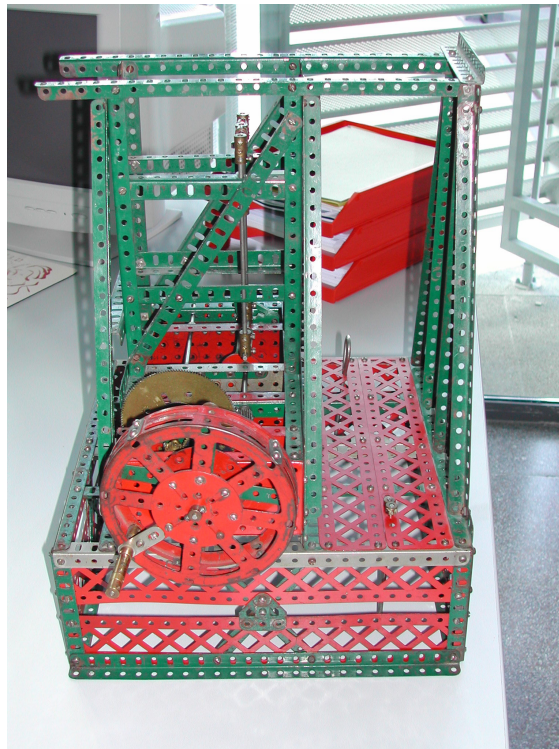


Figura 2. El pèndol amb suspensió vibrant fet amb MECCANO®.  
Construcció d'en J.M. Peris.

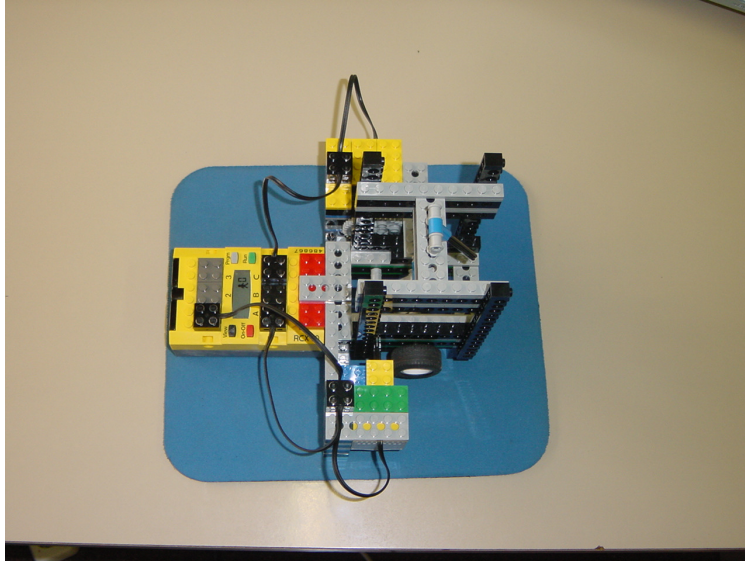


Figura 3. El pèndol amb suspensió vibrant fet amb LEGO MINDSTORMS®. Construcció d'en M. Noguera.